ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THANH HUYỀN

PHƯƠNG PHÁP CHỈNH LẶP SONG SONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THANH HUYỀN

PHƯƠNG PHÁP CHỈNH LẶP SONG SONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$C[a, b]$	không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$
$l^p,\ 1 \leq p < \infty$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
l_∞	không gian các dãy số bị chặn
$L^p[a, b],\ 1 \leq p < \infty$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a, b]$
$d(x, C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc

Mở đầu

Khái niệm bài toán đặt không chỉnh được nhà Toán học Jacques Hadamard người Pháp đưa ra vào năm 1932 khi nghiên cứu ảnh hưởng của bài toán giá trị biên với phương trình vi phân. Ông là người đã chỉ ra những bài toán không ổn định là "bài toán đặt không chỉnh" (xem wikipedia.org/wiki/Jacques Hadamard.)

Xét bài toán ngược: tìm một đại lượng vật lý $x \in E$ chưa biết từ bộ dữ kiện $(f_0, f_1, \ldots, f_N) \in F^{N+1}$, ở đây E và F là các không gian Banach, $N \geq 0$. Trên thực tế, các dữ kiện này thường không được biết chính xác, mà thường chỉ được biết xấp xỉ bởi $f_i^\delta \in F$ thỏa mãn

$$\|f_i^\delta - f_i\| \leq \delta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{1}$$

với $\delta_i > 0$ (sai số cho trước). Bộ hữu hạn dữ kiện $(f_0, f_1, \ldots, f_N)$ nhận được bằng việc đo đạc trực tiếp trên các tham số. Bài toán này được mô hình hóa toán học bởi

$$A_i(x) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{2}$$

ở đây $A_i : \mathcal{D}(A_i) \subset E \to F$ và $\mathcal{D}(A_i)$ là ký hiệu miền xác định của các toán tử A_i tương ứng, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Bài toán (2), nói chung, là một bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa nghiệm của bài toán không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Do đó, người ta phải sử dụng các phương pháp giải ổn định bài toán này sao cho khi sai số của dữ kiện đầu vào càng nhỏ thì nghiệm tương ứng phải xấp xỉ nghiệm của bài toán ban đầu. Một trong các phương pháp được sử dụng khá rộng rãi và hiệu quả là phương pháp chỉnh lặp.

Mục tiêu của đề tài luận văn là trình bày lại một số phương pháp chỉnh lặp giải hệ phương trình toán tử (2) trong trường hợp toán tử A_0 đơn điệu, h-liên tục (hemi-continuous), còn các toán tử A_i, $i = 1, \ldots, N$ khác có tính chất đơn điệu ngược mạnh trong không gian Banach thực phản xạ E trong các bài báo [7] và [16] công bố năm 2014 và 2018.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 "Phương trình toán tử trong không gian Banach" giới thiệu về không gian Banach lồi, trơn, ánh xạ đối ngẫu, phép chiếu mêtric; trình bày khái niệm phương trình toán tử đơn điệu đặt không chỉnh trong không gian Banach, phương trình toán tử j-đơn điệu trong không gian Banach cùng ví dụ về phương trình tích phân Fredlhom đặt không chỉnh.

Chương 2 "Một số phương pháp giải hệ phương trình toán tử" trình bày phương pháp chỉnh lặp giải hệ phương trình trình toán tử đơn điệu cùng sự hội tụ của phương pháp; trình bày phương pháp chỉnh lặp song song ẩn, phương pháp chỉnh lặp song song hiện giải hệ phương trình toán tử j-đơn điệu trong không gian Banach cùng sự hội tụ của các phương pháp này.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi được tham gia học tập, nghiên cứu. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin, xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các quý thầy, cô trong khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên nói chung và quý thầy cô trực tiếp giảng dạy lớp Cao học Toán K11A (khóa 2017 - 2019) đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Để hoàn thành luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY. Tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô và xin gửi lời tri ân của tôi đối với những điều cô đã dành cho tôi.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người

đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Tác giả luận văn

Trần Thanh Huyền

Chương 1

Phương trình toán tử trong không gian Banach

Chương này giới thiệu một số kiến thức cơ bản về không gian Banach lồi và trơn, ánh xạ đối ngẫu, phép chiếu mêtric; trình bày khái niệm về phương trình toán tử đơn điệu, phương trình toán tử j-đơn điệu cùng ví dụ về phương trình tích phân Fredlhom đặt không chỉnh trong không gian Hilbert. Nội dung của chương được viết trên cơ sở tổng hợp kiến thức từ các tài liệu [1], [2], [3] và [5].

1.1 Không gian Banach

Cho E là không gian Banach và ký hiệu E^* là không gian đối ngẫu của E. Trong luận văn này ta sử dụng ký hiệu $\|.\|$ cho chuẩn của cả hai không gian E và E^*. Với mỗi $x \in E$ và $x^* \in E^*$ ta viết $x^*(x)$ bởi $\langle x^*, x\rangle$ hoặc $\langle x, x^*\rangle$ (tích đối ngẫu). Nếu $E = H$ là không gian Hilbert thì tích đối ngẫu chính là tích vô hướng $\langle ., .\rangle$ và cảm sinh chuẩn tương ứng $\|.\|$.

1.1.1 Không gian Banach lồi, trơn

Định nghĩa 1.1.1 (xem [2, 3]) Không gian Banach E được gọi là phản xạ nếu với mọi phần tử $x^{**} \in E^{**}$, không gian liên hợp thứ hai của E, đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^* \in E^*.$$

Định lý 1.1.2 (xem [2, 3]) *Giả sử E là không gian Banach. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) E là không gian phản xạ.

(ii) Mọi dãy bị chặn trong E đều có dãy con hội tụ yếu.

Định nghĩa 1.1.3 (xem [3]) Không gian Banach E được gọi là

(i) lồi chặt nếu với mọi x, y thuộc mặt cầu đơn vị $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ của không gian Banach E, $x \neq y$, thì

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1, \quad \lambda \in (0,1);$$

(ii) lồi đều nếu với mọi $0 < \epsilon \leq 2$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ và $\|x - y\| \geq \epsilon$ thì tồn tại $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta;$$

(iii) trơn nếu giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

tồn tại với mọi $x, y \in S_E$.

Mô-đun trơn của E xác định bởi

$$\rho_E(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 : \|x\| = 1,\ \|y\| = \tau\right\}.$$

Định nghĩa 1.1.4 (xem [3]) Không gian Banach E được gọi là trơn đều nếu

$$\lim_{\tau \to 0} h_E(\tau) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau} = 0.$$

Ví dụ 1.1.5 (xem [3, Ví dụ 2.1.2, 2.1.3, 2.2.3])

(i) Không gian $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ với chuẩn $\|x\|_2$ được xác định bởi

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

là không gian lồi chặt.

(ii) Không gian $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ với chuẩn $\|x\|_1$ xác định bởi

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

không phải là không gian lồi chặt.

(iii) Không gian l^p, $L^p[a,b]$ với $1 < p < \infty$ là các không gian lồi đều.

1.1.2 Ánh xạ đối ngẫu. Phép chiếu mêtric

Định nghĩa 1.1.6 (xem [13, Định nghĩa 3.3]) Ánh xạ $J^s : E \to 2^{E^*}$, $s > 1$ (nói chung là đa trị) xác định bởi

$$J^s(x) = \Big\{u_s \in E^* : \langle x, u_s\rangle = \|x\|\|u_s\|,\ \|u_s\| = \|x\|^{s-1}\Big\}, \quad x \in E$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của không gian Banach E. Khi $s = 2$, ánh xạ J^2 được ký hiệu là J và được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Tức là

$$J(x) = \Big\{u \in E^* : \langle x, u\rangle = \|x\|\|u\|,\ \|u\| = \|x\|\Big\}, \quad x \in E.$$

Ví dụ 1.1.7 (xem [13, Mệnh đề 3.6, Mệnh đề 3.14], [3, Ví dụ 2.4.11])

(i) Trong không gian Hilbert H, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là ánh xạ đơn vị I.

(ii) Trong không gian l^p $(1 < p < \infty)$ và $L^p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được xác định tương ứng như sau:

$$Jx = \Big(|x_i|^{p-1}\text{sgn }(x_i)\Big)_{i=1}^{\infty} \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^p$$

và

$$Jx = \frac{|x|^{p-1}}{\|x\|^{p-1}}\text{sgn }(x) \quad \forall x \in L^p[0,1],$$

ở đây $\text{sgn}(x)$ là hàm dấu của x được xác định bởi công thức:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x < 0, \\ 1, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$